# Fragen zu Elektrizitätslehre

## Verständnisfragen

1. Welche Größe der Elektrizitätslehre ist in abgeschlossenen Systemen erhalten?

   Lösung: In abgeschlossenen Systemen ist die Ladung erhalten, da Ladungen nicht erzeugt oder vernichtet werden können.

2. Erklären Sie, welchen Regeln elektrische Felder folgen.

   Lösung: Elektrische Felder verlaufen definitionsgemäß von positiven zu negativen Ladungen. Sie stehen immer senkrecht auf ladungstragenden Oberflächen. Die Spannung U ist definiert als die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten im elektrischen Feld. In einem elektrischen Feld werden elektrische Ladungen beschleunigt, das Potenzial gibt demnach die Arbeitsfähigkeit des elektrischen Feldes an einer Ladung an.

3. Erklären Sie anschaulich, warum die Kapazitäten parallel geschalteter Kondensatoren addiert und in Reihe geschalteter Kondensatoren mit ihrem Kehrwert addiert werden.

   Lösung: Parallelgeschaltete Kondensatoren können durch zusammenschieben der Kondensatorplatten als ein großer Kondensator gesehen werden. Dadurch können die Kapazitäten der Kondensatoren einfach addiert werden. Bei in Reihe geschalteten Kondensatoren heben sich die Ladungen der beiden leitend verbundenen mittleren Kondensatorplatten gegenseitig auf, wodurch der effektive Plattenabstand der äußeren Kondensatorplatten ansteigt. Die Kapazitäten werden darum in ihrem Kehrwert addiert.

4. Warum haben magnetische Felder immer geschlossene Feldlinien?

   Lösung: Magnetische Felder haben immer geschlossene Feldlinien, da keine magnetischen Monopole existieren.

5. Warum hat der Stromfluss in einer Spule einen asymptotischen Verlauf?

   Lösung: Der Stromfluss in einer Spule hat einen asymptotischen Verlauf, da bei einem Stromfluss in einer Spule ein Magnetfeld induziert wird, welches umgekehrt wieder einen dem ursprünglichen Strom entgegengerichteten Strom induziert. Dieser dämpft den effektiven Stromfluss in der Spule.

6. Warum ist die Gefahr von Herzrhythmusstörungen bei Stromunfällen mit Wechselstrom bei gleicher Spannung höher als mit Gleichstrom?

   Lösung: Das Herz wird über Ladungsänderungen innerhalb des Herzmuskelgewebes gesteuert. Die hierbei auftretenden Ladungsverschiebungen und daraus resultierenden Spannungen werden im Herzmuskel selbst produziert. Wird ein äußerer Strom angelegt, der höher ist als die intern auftretenden Ströme, so wird die Ladungsverschiebung im Herzmuskel von diesem externen Strom dominiert. Bei Wechselströmen führt dies dazu, dass der Herzmuskel der Frequenz des externen Stroms zu folgen beginnt. Gleichströme führen nur zu einer einseitigen Ladungsverschiebung die vom Körper leichter ausgeglichen werden kann. Wechselströme sind im weiteren gefährlich, da der Körperwiderstand aus ohmschen und kapazitiven Widerständen zusammengesetzt ist und kapazitive Widerstände mit steigender Frequenz sinken. Dies führt zu einem höheren Stromfluss im Körper.

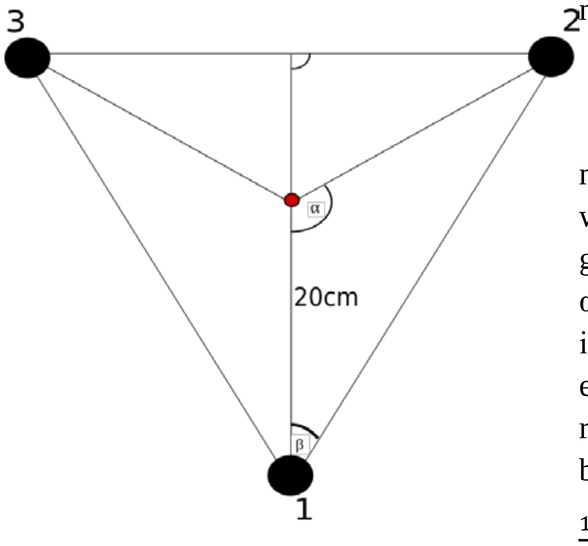
# Rechenaufgaben

1. Bei  jedem Schlag des Herzens ändert sich das Membranpotenzial der Herzmuskelzellen. Im Ruhezustand ist die Membranaußenseite positiv und die Membraninnenseite negativ geladen, bei Erregung kehrt sich diese Anordnung um. Die Erregung bewegt sich während des Kontraktionsvorganges vom oberen Ende des Herzens her zu seiner Spitze, so dass das Herz als elektrischer Dipol angesehen werden kann. Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei ungleichnamigen Ladungen q in einem Abstand d, der Dipol ist von außen betrachtet also elektrisch neutral. Er berechnet sich über $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$. Dieser elektrische Dipol wird bei einer EKG-Messung untersucht. Das elektrische Potenzial φ in einem Abstand r vom Zentrum des Dipols ist gegeben durch $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$. Das Herz hat eine Länge von etwa 15cm.Bei einer EKG-Messung werden drei oder mehr Ableitungselektroden auf dem Brustkorb oder den Gliedmaßen des Patienten angebracht. Aus der gemessenen Spannungsdifferenz an den verschiedenen Elektroden kann auf die Herzaktivität geschlossen werden. Nehmen Sie an, Sie führen ein EKG durch, bei dem drei Elektroden in jeweils 20cm Abstand zum Herzen auf dem Brustkorb des Patienten angebracht sind. Die Elektroden bilden ein gleichzeitiges Dreieck, in dessen Mittelpunkt der Herzmittelpunkt liegt. Die untere Spitze des Dreiecks liegt dabei vertikal unterhalb des Herzmittelpunktes, die obere Dreieckseite verläuft waagerecht.

   a) Fertigen Sie eine Skizze der Elektrodenanordnung an und berechnen Sie den Abstand der Elektroden zueinander. Die Elektroden werden entgegen des Uhrzeigersinns beginnend mit der unteren Dreieckspitze aufsteigend nummeriert.

   b) Bei einer EKG-Messung messen Sie in der R-Zacke eine Spannungsdifferenz von 2mV zwischen Elektrode 1 und 3 und eine Spannung von 1,3mV zwischen Elektrode 2 und 3. Bestimmen Sie die maximale Ladung q im Herzen sowie seine Neigung gegen die Senkrechte. Warum werden immer drei oder mehr Elektroden verwendet?

Lösung:




a) Bei einem Gleichseitigen Dreieck mit gegebenen Mittelpunktsabständen werden zwischen den Mittelpunktsgraden gleiche Winkel eingeschlossen. Es gilt also α=120°. Hieraus folgt direkt, dass β=30°, da im Dreieck gelten muss α+2β=180°. Mit einer Hilfslinie (oben) schafft man sich ein rechtwinkliges Dreieck, mit dem sich berechnen lässt

$\frac{1}{2}\overline{P_1P_2} = cos(30°) \cdot 0{,}2m \approx 0{,}173m,$

woraus sich ergibt, dass $\overline{P_1P_2} \approx 34{,}6cm$.

b) Für die Spannung zwischen den Elektroden gilt $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{p}(\vec{r_A} - \vec{r_B}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}p_{AB} \cdot \overline{AB}$ wobei gilt $p_{AB} = cos(\gamma) \cdot p = cos(\gamma) \cdot q \cdot d = q \cdot d_{AB}$ und γ ist der Winkel zwischen $\overline{AB}$ und $\vec{p}$. Man berechnet zunächst den effektiven Dipol über $p_{AB} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^3 U_{AB}}{\overline{AB}}$ für beide Verbindungslinien. Man erhält $p_{13} \approx 5{,}15 \cdot 10^{-15}Cm$ und $p_{23} \approx 3{,}34 \cdot 10^{-15}Cm$. Da d, $p_{13}$, $p_{23}$ und die relative Ausrichtung der Geraden $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_3}$ bekannt ist folgt: $p_{23} = cos(\gamma_{23}) \cdot p \Leftrightarrow \gamma_{23} = arccos\left(\frac{p_{23}}{p}\right)$ und $p_{13} = cos(\gamma_{13}) \cdot p \Leftrightarrow \gamma_{13} = arccos\left(\frac{p_{13}}{p}\right)$. Aus geometrischen Überlegungen heraus folgt außerdem, dass $\gamma_{13} = 180° - 30° - (180° - \gamma_{23}) = \gamma_{23} - 30°$. Somit findet man

$$p = \frac{p_{13}}{cos(\gamma_{13})} = \frac{p_{13}}{cos(\gamma_{23}-30°)} = \frac{p_{23}}{cos(\gamma_{23})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{13}}{p_{23}} = \frac{cos(\gamma_{23}-30°)}{cos(\gamma_{23})} = \frac{cos(\gamma_{23})cos(30°)}{cos(\gamma_{23})} + \frac{sin(\gamma_{23})sin(30°)}{cos(\gamma_{23})} = cos(30°) + tan(\gamma_{23})sin(30°)$$

$$\Leftrightarrow tan(\gamma_{23}) = \frac{1}{sin(30°)}\left(\frac{p_{13}}{p_{23}} - cos(30°)\right)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{23} = arctan\left(\frac{1}{sin(30°)}\left(\frac{p_{13}}{p_{23}} - cos(30°)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \gamma_{23} \approx 53{,}5°$$

$$\Rightarrow \gamma_{13} = 23{,}5°$$

Nun lässt sich die verschobene Ladung leicht berechnen, denn es gilt $p = q \cdot d = \frac{p_{AB}}{cos(\gamma_{AB})} \Leftrightarrow q = \frac{p_{AB}}{d \cdot cos(\gamma_{AB})}$. Man erhält somit $q = \frac{5{,}15 \cdot 10^{-15}Cm}{0{,}15m \cdot cos(23{,}5°)} \approx \frac{3{,}34 \cdot 10^{-15}Cm}{0{,}15m \cdot cos(53{,}5°)} \approx 3{,}74 \cdot 10^{-14}C$. Zuletzt muss noch die Neigung gegen die Senkrechte ermittelt werden. Da die Gerade $\overline{P_2P_3}$ eine Waagerechte ist kann einfach gerechnet werden $Neigung = 180° - 90° - \gamma_{23}$ und man erhält eine Neigung von 36,5°.

2. Der menschliche Körper stellt einen Leiter mit einem spezifischen Widerstand von im Mittel etwa $\bar{\rho} = 3\Omega m$ dar. Dieser Widerstand setzt sich aus einem komplexen Zusammenspiel von kapazitiven Widerständen und elektrolytischen Leitern zusammen, die hier jedoch ignoriert werden sollen.

   a) Bestimmen Sie den Hand-zu-Hand-Widerstand eines erwachsenen Menschen. Nehmen Sie hierzu an, dass der Abstand zwischen den Fingerspitzen der linken und rechten Hand 2,2m beträgt und die Arme einen mittleren Durchmesser von 8,6cm haben.

   b) Ein Strom von bereits 15mA kann bei Menschen zu einer Blutdrucksteigerung und Kontraktion der Muskulatur führen, ab etwa 50mA kommt es zur Bewusstlosigkeit und bereits 80mA können zum Tod führen. Bestimmen Sie die für diese Reaktionen notwendigen Spannungen angelegt an den beiden Händen einer Person.

   c) An beide Hände einer Person werden Elektroden mit einer Kontaktfläche von 200mm$^2$ angebracht, an die eine Spannung von 230V angelegt wird. Die Erwärmung kann berechnet werden mit $\Delta T = \frac{P}{\alpha A}$ wobei α der Wärmeübergangskoeffizient ist und in diesem Fall etwa $2000\frac{W}{m^2K}$ beträgt. Welcher Erwärmung ist die Haut ausgesetzt?

Lösung:

a) Es gilt $R = \rho \frac{l}{A}$, also $R = 3\Omega \frac{m \cdot 2{,}2m}{\pi \cdot (0{,}092m)^2} \approx 1136{,}2\Omega$.

b) Mit $U = R \cdot I$ erhält man $U_1 = 1136{,}2\Omega \cdot 0{,}0015A \approx 1{,}7V$, $U_2 = 1136{,}2\Omega \cdot 0{,}005A \approx 5{,}7V$, $U_3 = 1136{,}2\Omega \cdot 0{,}008A \approx 9{,}1V$.

c) Man berechnet zunächst I mittels $I = \frac{U}{R} \Rightarrow I \approx 0{,}2A$. Hieraus ergibt sich $\Delta T = \frac{230V \cdot 0{,}2A}{2000 \frac{W}{m^2 K} \cdot 0{,}0002m^2} = 115K$. Bereits dieser Strom, eingebracht über eine kleine Elektrode, würde also zu Verbrennungen führen.

3. Defibrillatoren müssen über kurze Zeit vergleichsweise hohe Ströme an den menschlichen Körper abgeben. Hierzu ist ein Kondensator verbaut, der bei aufgelegten Elektroden seine Ladung sehr schnell abgeben kann. Hier wird angenommen dies sei ein einfacher Plattenkondensator. Der Körperwiderstand wird durch eine spezielle Beschaffenheit der Elektroden, die den Übergangswiderstand verkleinert, auf etwa 100Ω zwischen den Elektroden gesenkt. Fließen soll ein Strom von etwa 20A, um die Herzmuskelzellen vollständig zu depolarisieren und ein Kammerflimmern zu beenden.

a) Bestimmen Sie die für die obigen Werte notwendige Spannung an den Elektroden.

b) Die Entladung des verbauten Kondensators erfolge in diesem Fall innerhalb von 32ms. Bestimmen Sie die sich ursprünglich auf dem Kondensator befindliche Ladung.

c) Bestimmen Sie die Kapazität des Kondensators. Welches Verhältnis von Kondensatorfläche A zu Kondensatorabstand d ist ohne Dielektrikum für diese Kapazität notwendig? Was müssen Sie tun um hohe Kapazitäten auch bei kleineren Kondensatoren zu erreichen?

d) Bestimmen Sie die im geladenen Kondensator gespeicherte Energie und die Leistung des Defibrilators.

e) Der Abstand der Platten betrage 0,2mm. Bestimmen Sie die Stärke des elektrischen Feldes.

Lösung:

a) Es wird wieder gerechnet $U = R \cdot I \Rightarrow U = 2kV$.

b) Es gilt $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta Q = I \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 0{,}064C$.

c) Zunächst wird die Gesamtkapazität berechnet: $Q = C \cdot U \Leftrightarrow C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = 3{,}2 \cdot 10^{-5}F$. Die Kapazität lässt sich für Plattenkondensatoren jedoch auch über $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ berechnen. Daraus folgt $\frac{A}{d} = \frac{C}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{A}{d} \approx 3614185{,}68m$. Dies ist nur schwer durchführbar. Das Verhältnis lässt sich jedoch verkleinern, wenn ein Dielektrikum mit einer relativen Permeabilität >>1 zwischen die Kondensatorplatten gebracht wird.

d) Die gespeicherte Energie beträgt $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \Rightarrow W = 64J$ und die Leistung $P = U \cdot I \Rightarrow P = 40000W$.

e) Das elektrische Feld ist gegeben durch $E = \frac{U}{d} \Rightarrow E = 1 \cdot 10^7 \frac{V}{m}$.

4. Bei der Magnetresonanztomographie werden hochauflösende mehrdimensionale Bilder vom Inneren des Körpers mithilfe von starken Magnetfelder bis hin zu 7T erzeugt. MRT-Geräte für die normale Diagnostik arbeiten normalerweise mit Feldstärken zwischen 1,5T und 3,0T. Sie arbeiten an einem MRT-Gerät, dessen Hauptspule 2894 Windungen und eine Länge von 84cm hat.

   a) Mit dieser Spule solle ein Magnetfeld von 1,3T erzeugt werden. Welche Stromstärke ist dafür notwendig.

   b) Kupfer, welches häufig für Magnetspulen genutzt wird, hat einen spezifischen Widerstand von $1{,}721 \cdot 10^{-2} \Omega \frac{mm^2}{m}$. Nehmen Sie an der Draht habe eine Länge von 10km und einen Durchmesser von 3mm. Bestimmen Sie die für den Magneten notwendige Leistung.

   c) Warum werden für Magnetresonanztomographen häufig supraleitende Spulenmaterialien mit verschwindendem spezifischen Widerstand genutzt?

Lösung:

   a) Die zu verwendende Formel lautet $B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \Leftrightarrow I = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N} \Rightarrow I \approx 300{,}27A$

   b) Zunächst wird der Widerstand des Kupferdrahts benötigt. Es gilt $R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow R = \frac{1{,}721 \cdot 10^{-2} \Omega \frac{mm^2}{m} \cdot 10000m}{\pi (3mm)^2} \approx 6{,}09\Omega$. Die Leistung erhält man nun über $P = R \cdot I^2 \Rightarrow P = 549087{,}02W$.

   c) Die von dem Magneten benötigte Leistung ist enorm hoch. Mit dieser Leistung könnten etwa 1200 Haushalte mit Strom versorgt werden. Um die Leistung gering zu halten und auch weil bei widerstandsbehafteten Materialien die Abwärme ab einem gewissen Strom kaum noch händelbar ist, werden Spulen leistungsfähiger MRT-Geräte aus supraleitenden Materialien hergestellt. Bei diesen Materialien geht der Widerstand gegen Null und ein in ihnen fließender Strom bleibt ohne externe Stromquelle in Bewegung. So können über lange Zeiten konstante Magnetfelder erreicht werden.

5. Massenspektrometer finden in vielen medizintechnischen und biochemischen Bereichen Anwendung. Mit ihrer Hilfe können die Bestandteile eines Stoffgemischs mit großer Genauigkeit angegeben werden. Das Massenspektrometer bedient sich dabei der Lorentz-Kraft: Die zu analysierenden Stoffe werden in die Gasphase überführt und ionisiert. Anschließend werden sie in einem elektrischen Feld beschleunigt und gelangen dann in ein magnetisches Feld. Durch die Lorentz-Kraft werden Sie in diesem abgelenkt, die Größe der Ablenkung ist jedoch proportional zu der Masse des Teilchens. Am Austrittswinkel des Teilchens aus dem Magnetfeld lässt sich somit ablesen, welche Masse das Teilchen besitzt. Sie beschleunigen nun ein einfach positiv geladenes Teilchen in einem Magnetfeld der Stärke 9,8V. Anschließend gelangt es in ein Magnetfeld der Stärke 32mT. Die Länge dieses Magnetfeldes beträgt l=10cm.

a) Bestimmen Sie die Gleichung für die Beschleunigung, der dieses Teilchen abhängig von seiner Masse ausgesetzt ist.

b) Ein Teilchen ist hinter dem Magnetfeld um s=5,6cm von seinem Weg abgelenkt worden. Welche Masse hat das Teilchen? Um welchen Stoff könnte es sich handeln?

Lösung:

a) Im elektrischen Feld erfährt das Teilchen eine Änderung seiner kinetischen Energie um $\Delta E = q \cdot U$. Wir nehmen an, dass seine anfängliche kinetische Energie vernachlässigbar ist. Daraus erhält man $\frac{1}{2}mv^2 = q \cdot U \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$. Dies lässt sich nun in die Gleichung für die Lorentz-Kraft einsetzen: $F_L = q \cdot v \cdot B = q \cdot \sqrt{\frac{2qU}{m}} \cdot B = m \cdot a \Leftrightarrow a = B \cdot \sqrt{\frac{2q^3U}{m^3}}$.

b) Der zurückgelegte Weg ist mit der Beschleunigung über $s = \frac{1}{2}at^2$ verbunden. Um die Zeit t herauszufinden muss aber die Geschwindigkeit des Teilchens bekannt sein. Man formt also um $v = \frac{l}{t} \Leftrightarrow t = \frac{l}{v}$. Eingesetzt in s erhält man $s = \frac{1}{2}a\left(\frac{l}{v}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{2sv^2}{l^2}$. Dies lässt sich nun in die in a bestimmte Formel einsetzen: $\frac{2sv^2}{l^2} = B\sqrt{\frac{2q^3U}{m^3}}$. Setzt man nun noch v wie in a bestimmt ein, so erhält man $\frac{4sqU}{ml^2} = B\sqrt{\frac{2q^3U}{m^3}} \Leftrightarrow \frac{16}{m^2}\left(\frac{sqU}{l^2}\right)^2 = B^2\frac{2q^3U}{m^3} \Leftrightarrow$ $8\frac{s^2U}{l^4} = B^2\frac{q}{m} \Leftrightarrow m = \frac{B^2ql^4}{8s^2U}$. Nun werden die angegebenen Werte eingesetzt: $m = \frac{(0{,}032T)^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}C \cdot (0{,}1m)^4}{8 \cdot (0{,}056m)^2 \cdot 9{,}8V} \approx 6{,}66 \cdot 10^{-26}kg = 40{,}1u$. Bei dem Teilchen handelt es sich somit um Calcium.